

MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
COURS 2-16 “MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS”

6 Décembre 2013 — Examen (1) — Corrigé

I. Exercices sur les relations rationnelles

Dans ce qui suit, A et B sont deux alphabets satisfaisant $\text{Card}(A) \geq 2$ et $\text{Card}(B) \geq 1$ sauf mention explicite du contraire.

1.— Rappeler, en donnant un exemple, que l’intersection de deux relations R et S dans $\text{Rat } A^* \times B^*$ n’est pas nécessairement rationnelle.

Solution: $R = \{(a^n b^m, a^n) \mid n, m \geq 0\}$ et $S = \{(a^n b^m, a^m) \mid n, m \geq 0\}$.

L’intersection $R \cap S = \{(a^n b^n, a^n) \mid n \geq 0\}$ n’est pas une partie rationnelle de $A^* \times B^*$ puisque sa *projection* sur A^* : $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, n’est pas un langage rationnel de A^* .

2.— Montrer, toujours en donnant un exemple, que l’intersection d’une relation binaire rationnelle et d’une relation binaire synchrone sur $A^* \times B^*$ n’est pas nécessairement rationnelle.

Solution: avec R et S comme ci-dessus car $R^\# = (a, a)^*(b, \#)^* \in \text{Rat}((A \cup \{\#\}) \times (B \cup \{\#\}))^*$.

3.— On appelle substitution rationnelle toute application $\sigma : A \rightarrow \text{Rat } B^*$. Cette application σ définit une application de A^* dans $\text{Rat } B^*$ qui en est l’extension par morphisme et qu’on note encore σ ; c’est-à-dire que si $u = a_1 \cdots a_n$ est un mot de A^* , avec les a_i dans A , alors $\sigma(u) = \sigma(a_1) \cdots \sigma(a_n)$ (produit de concaténation) et l’image par σ du mot vide de A^* est le mot vide de B^* . Cette application est étendue aux sous-ensembles $X \subseteq A^*$ en posant $\sigma(X) = \bigcup_{u \in X} \sigma(u)$.

Montrer que si X est une partie rationnelle de A^* alors la relation

$$R = \{(u, v) \mid u \in X, v \in \sigma(u)\} \tag{1}$$

est rationnelle.

Solution: soit \mathcal{F} la famille des parties de A^* pour lesquelles la relation R en (1) est rationnelle. Il suffit de vérifier que \mathcal{F} contient les parties finies et est fermée par union, produit et étoile.

4.— Soit $R \subseteq A^* \times B^*$ une relation binaire rationnelle. Pour tout $u \in A^*$ on pose $R(u) = \{v \in B^* \mid (u, v) \in R\}$. Montrer que si $K \in \text{Rat } B^*$, alors

$$X = \{u \in A^* \mid R(u) \cap K \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad Y = \{u \in A^* \mid R(u) \subseteq K\}$$

sont des parties rationnelles de A^* . Dire en quelques mots pourquoi ces parties sont en fait constructibles.

Montrer que si $A = \{a, b\}$ et si on remplace B^* par le monoïde $M = a^* \times a^*$ l'énoncé précédent n'est plus vrai.

Solution $X = \pi_1(R \cap A^* \times K)$ où π_1 est la projection de $A^* \times B^*$ sur A^* . En effet $A^* \times K$ est reconnaissable (Elgot et Mezei), $R \cap A^* \times K$ est rationnelle car intersection d'un rationnel avec un reconnaissable et X est rationnel car image d'un rationnel. De même $Y = A^* \setminus (\pi_1(R \cap A^* \times (B^* \setminus K)))$. Les parties sont constructibles parce que l'on a montré en cours que l'intersection d'un rationnel R avec un reconnaissable S est reconnu par un automate à deux bandes dont la fonction de transition est définie par la fonction de transition de R et le morphisme dans un monoïde fini dans lequel se reconnaît S .

Lorsque B^* est remplacé par $M = a^* \times a^*$ on considère

$$R = \{(u, a^{|u|_a}, a^{|u|_b}) \in \{a, b\}^* \times a^* \times a^*\}$$

et $K = (a, a)^* \in \text{Rat } a^* \times a^*$. Puisque R est le graphe d'une fonction de A^* dans $a^* \times a^*$ on a $X = Y = \{u \in A^* \mid u_a = u_b\}$ qui n'est pas une partie rationnelle.

II. Exercices sur les automates avec multiplicité

1 .— **Tetris.** Soit $\mathbb{M} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}, \max, + \rangle$ le semi-anneau max-+ sur les réels positifs, auxquels on a adjoint l'élément $-\infty$.

On considère un “jeu de Tetris” simplifié, représenté à la figure 1.a. Il y a trois colonnes, et deux pièces distinctes: a et b ; les pièces tombent verticalement, sans changer de colonnes, ni d'orientation. Une “partie” est donc entièrement décrite par un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$, et le résultat par la hauteur atteinte sur chacune des trois colonnes. La pièce a est à fond plat et entièrement déterminée par les deux hauteurs α et α' dans \mathbb{R}_+ (une valeur nulle correspond à une “plaque” d'épaisseur nulle mais qui est bel et bien présente). La pièce b a la face supérieure plate et est entièrement déterminée par les deux hauteurs β et β' dans \mathbb{R}_+ .

Expliquer comment le comportement de ce jeu est modélisé par le \mathbb{M} -automate \mathcal{T} représenté à la figure 1.b.

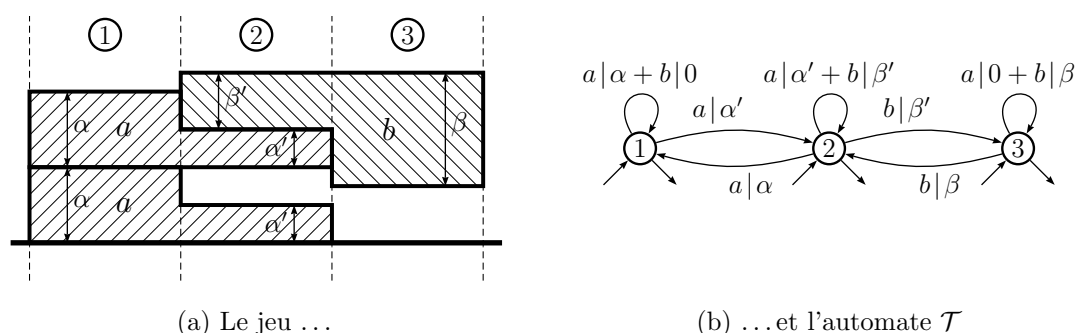


Figure 1: Tetris simplifié et son modèle

Solution: Le comportement de l'automate \mathcal{T} est donné par celui de la \mathbb{M} -représentation (λ, τ, ν) , avec

$$\lambda = (0 \ 0 \ 0), \quad \tau(a) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & -\infty \\ \alpha & \alpha' & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau(b) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & \beta' & \beta' \\ -\infty & \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut vérifier, par récurrence sur la longueur du mot w , que les coordonnées du vecteur $\lambda \cdot \tau(w)$ donne les hauteurs sur les colonnes ①, ②, et ③ respectivement. La propriété est vraie pour $w = 1_{A^*}$ puisque $\lambda = (0 \ 0 \ 0)$ décrit bien la situation avant qu'aucune pièce ne tombe.

Soit $\lambda \cdot \tau(w) = \xi = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \tau(wa) &= \xi \cdot \tau(a) = (\max(\xi_1 + \alpha, \xi_2 + \alpha) \ \max(\xi_1 + \alpha', \xi_2 + \alpha') \ \xi_3) \\ &= (\max(\xi_1, \xi_2) + \alpha \ \max(\xi_1, \xi_2) + \alpha' \ \xi_3) \end{aligned}$$

correspond bien à la situation après la chute de la pièce a : le fond de la pièce repose à l'ordonnée $\zeta = \max(\xi_1, \xi_2)$, les hauteurs des colonnes ① et ② sont respectivement $\zeta + \alpha$ et $\zeta + \alpha'$, et celle de ③ est inchangée: *cf.* figure 2.

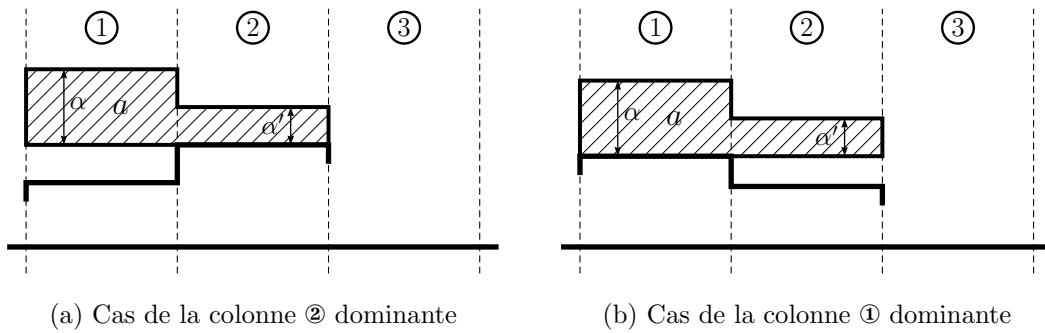


Figure 2: Pose de la pièce a

De façon analogue,

$$\lambda \cdot \tau(wb) = \xi \cdot \tau(b) = (\xi_1 \ \max(\xi_2 + \beta', \xi_3 + \beta) \ \max(\xi_2 + \beta', \xi_3 + \beta))$$

correspond à la situation après la chute de la pièce b : la hauteur de la colonne ① est inchangée et celle des colonnes ② et ③ est celle de la face supérieure de la pièce b : $\max(\xi_2 + \beta', \xi_3 + \beta)$ *cf.* figure 3.

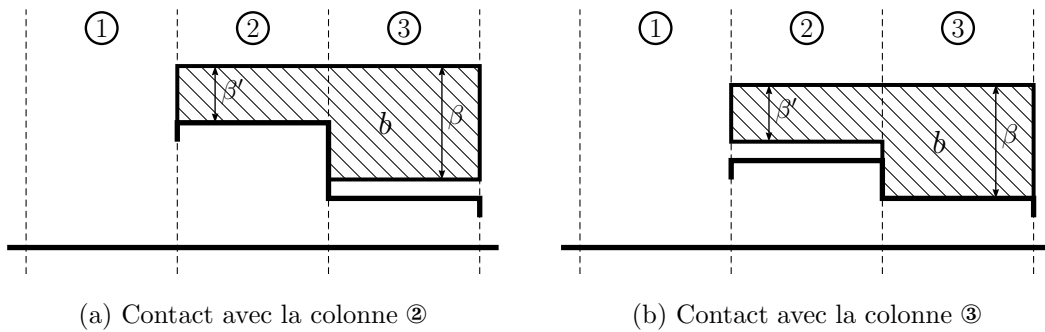


Figure 3: Pose de la pièce b

2. — Le \mathbb{N} -automate \mathcal{C}_1 sur $\{a, b\}^*$ de la figure 4.a associe à chaque mot w l'entier \overline{w} dont la représentation en base 2 est w quand on remplace a par le chiffre 0 et b par 1.

Le \mathbb{N} -automate \mathcal{C}_2 , carré de Hadamard de \mathcal{C}_1 : $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \odot \mathcal{C}_1$, a pour quotient minimal \mathcal{V}_2 représenté à la figure 4.b et pour co-quotient minimal \mathcal{V}'_2 représenté à la figure 4.c.

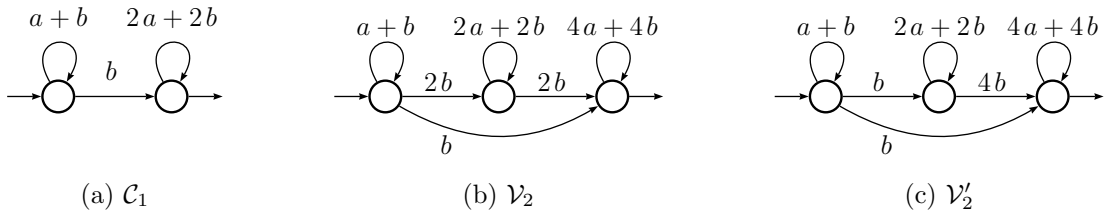


Figure 4: Trois \mathbb{N} -automates

(a) Calculer le quotient minimal \mathcal{V}_3 et le co-quotient minimal \mathcal{V}'_3 de $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \odot \mathcal{C}_1$.

(b) Calculer le co-quotient minimal \mathcal{V}'_4 de $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 \odot \mathcal{C}_1$. Comparer avec \mathcal{V}'_3 .¹

(c) En vous inspirant du calcul précédent, et en vous appuyant sur le calcul du comportement de $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \odot \mathcal{C}_1$, calculer le co-quotient minimal \mathcal{V}'_{n+1} de \mathcal{C}_{n+1} pour tout n .

Solution: Pour mémoire,

$$\mathcal{C}_2 = \left\langle (1 \ 0 \ 0 \ 0), \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

et \mathcal{V}_2 est le quotient minimal de \mathcal{C}_2 puisque l'on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & 2b & b \\ 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 2b & b \\ 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹L'énoncé donné à l'examen demandait de comparer avec \mathcal{V}_3 ce qui n'a évidemment pas grand sens.

De façon similaire, \mathcal{V}'_2 est le co-quotient minimal de \mathcal{C}_2 puisque l'on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2a+2b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 2a+2b & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b \\ 0 & 0 & 4a+4b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Le quotient minimal de $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \odot \mathcal{C}_1$ est le quotient minimal $\mathcal{W}_3 = \mathcal{V}_2 \odot \mathcal{C}_1$ avec

$$\mathcal{W}_3 = \begin{pmatrix} a+b & 2b & b & b & 2b & b \\ 0 & 2a+2b & 2b & 0 & 2b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 0 & 0 & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2b & 4b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+4b & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix}.$$

On observe que si l'on fait la somme des colonnes 2 et 4 d'une part et des colonnes 3 et 5 d'autre part, on obtient une matrice dont les lignes 2 et 4 d'une part et des lignes 3 et 5 d'autre part sont égales, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & 3b & 3b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 4b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{V}_3 \quad \text{avec} \\ \mathcal{V}_3 &= \begin{pmatrix} a+b & 3b & 3b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 2b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'automate \mathcal{V}_3 est représenté à la figure 5.a.

De façon similaire, le co-quotient minimal de \mathcal{C}_3 est le co-quotient minimal $\mathcal{W}'_3 = \mathcal{V}'_2 \odot \mathcal{C}_1$ avec

$$\mathcal{W}'_3 = \begin{pmatrix} a+b & 2b & b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 0 & 2b & 4b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 0 & 0 & 4b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+2b & 2b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+4b & 8b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix}.$$

On observe que si l'on fait dans \mathcal{W}'_3 la somme des lignes 2 et 4 d'une part et des lignes 3 et 5 d'autre part, on obtient une matrice dont les colonnes 2 et 4

d'une part et des colonnes 3 et 5 d'autre part sont égales, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{W}'_3 = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 2a+2b & 4b & 6b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 0 & 4a+4b & 12b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix} = \mathcal{V}'_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \mathcal{V}'_3 = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 6b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 12b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi le co-quotient minimal \mathcal{V}'_3 de \mathcal{C}_3 , représenté à la figure 5.b.

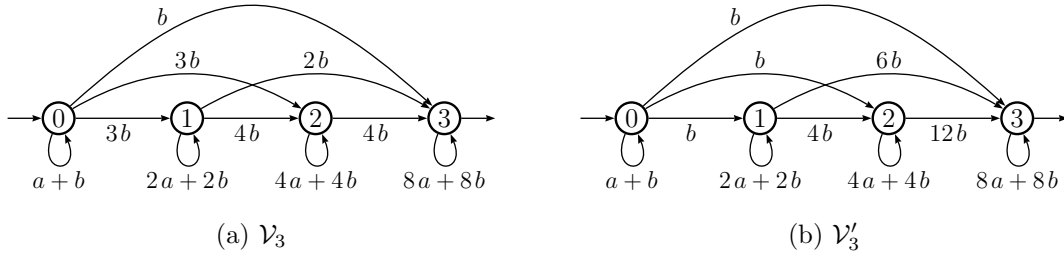


Figure 5: Les quotient et co-quotient minimaux de \mathcal{C}_3

(b) On applique la même méthode pour calculer le co-quotient minimal \mathcal{V}'_4 de $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 \odot \mathcal{C}_1$: \mathcal{V}'_4 est le co-quotient minimal $\mathcal{W}'_4 = \mathcal{V}'_3 \odot \mathcal{C}_1$ avec

$$\mathcal{W}'_4 = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 6b & 0 & 2b & 4b & 6b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 12b & 0 & 0 & 4b & 12b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b & 0 & 0 & 0 & 8b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+2b & 2b & 2b & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4a+4b & 8b & 12b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8a+8b & 24b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16a+16b \end{pmatrix}.$$

On observe que si l'on fait dans \mathcal{W}'_4 la somme des lignes 2 et 5, 3 et 6 et 4 et 7, on obtient une matrice dont les colonnes 2 et 5, 3 et 6 et 4 et 7 sont égales,

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{W}'_4 = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 6b & 2a+2b & 4b & 6b & 8b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 12b & 0 & 4a+4b & 12b & 24b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b & 0 & 0 & 8a+8b & 32b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16a+16b \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{V}'_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec
$$\mathcal{V}'_4 = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & b \\ 0 & 2a+2b & 4b & 6b & 8b \\ 0 & 0 & 4a+4b & 12b & 24b \\ 0 & 0 & 0 & 8a+8b & 32b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16a+16b \end{pmatrix} .$$

On obtient ainsi le co-quotient minimal \mathcal{V}'_4 de \mathcal{C}_4 , représenté à la figure 6.

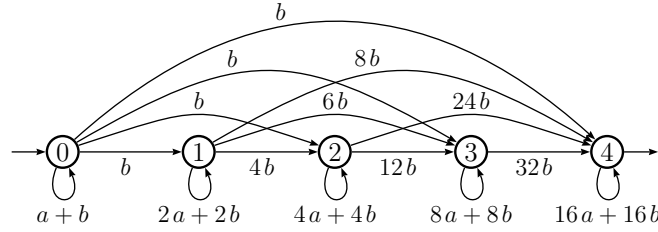


Figure 6: Le co-quotient minimal de \mathcal{C}_4

On observe que \mathcal{V}'_3 est un sous-automate de \mathcal{V}'_4 , ou, plus précisément, que \mathcal{V}'_3 est obtenu à partir de \mathcal{V}'_4 en rendant l'état 3 final et en supprimant l'état 4.

(c) Il a été établi en cours que, pour tout u dans $\{a, b\}^*$, $\langle \mathcal{C}_1, u \rangle = \bar{u}$, où \bar{u} est l'entier dont la représentation en binaire est le mot u dans lequel les a sont remplacés par des 0 et les b par des 1. On en déduit que pour tout entier n , $\langle \mathcal{C}_n, u \rangle = \bar{u}^n$.

Pour tout entier n , on a:

$$\begin{aligned} \text{si } u = va, & \quad \bar{u}^n = \overline{va}^n = (2\bar{v})^n = 2^n \bar{v}^n, \\ \text{si } u = vb, & \quad \bar{u}^n = \overline{vb}^n = (2\bar{v} + 1)^n = \sum_{i=0}^{i=n} 2^i C_n^i \bar{v}^i. \end{aligned} \quad (2)$$

D'où la construction d'un \mathbb{N} -automate \mathcal{V} dont l'ensemble des états est \mathbb{N} (\mathcal{V} est donc infini), l'état initial est $\{0\}$ et les transitions sont définies par

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad i \xrightarrow{2^i a} i \quad \text{et} \quad i \xrightarrow{2^i C_j^i b} j .$$

Les formules (2) montrent, par récurrence sur n , puis sur la longueur de u , que la somme des coefficients des calculs d'origine 0, d'extrémité n et d'étiquette u est \bar{u}^n .

L'automate (fini) \mathcal{V}'_n obtenu en gardant les $n + 1$ premiers états de \mathcal{V}' et en prenant n comme unique état final est équivalent à \mathcal{C}_n . Un calcul identique aux précédents permet d'établir que c'est le co-quotient minimal de $\mathcal{V}'_{n-1} \odot \mathcal{C}_1$.

3 .— Construire le revêtement de Schützenberger \mathcal{S} de l'automate \mathcal{A} ci-dessous.

Combien y a-t-il de \mathcal{S} -immersions distinctes dans ce revêtement (c'est-à-dire, de sous-automates \mathcal{T} de \mathcal{S} distincts qui sont à la fois non-ambigus et équivalents à \mathcal{A})?

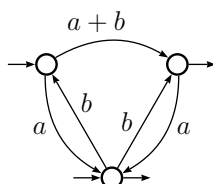


Figure 7: L'automate \mathcal{A}

Solution: La figure 8 montre \mathcal{A} , \mathcal{A}_{det} et le revêtement de Schützenberger \mathcal{S} .

Les transitions de \mathcal{S} qui arrivent dans un même état et se projettent sur une même transition de \mathcal{A}_{det} sont marquées avec des lignes doubles. On notera qu'on a fait de même pour les flèches finales des états de \mathcal{S} notés u et v (qu'on peut voir comme deux transitions qui arrivent sur l'état final subliminal de \mathcal{S} et qui se projettent sur la même transition finale de \mathcal{A}_{det}).

Pour avoir une \mathcal{S} -immersion, il faut supprimer un élément de chacun de ces couples, ce qui donne $2^3 = 8$ possibilités distinctes.

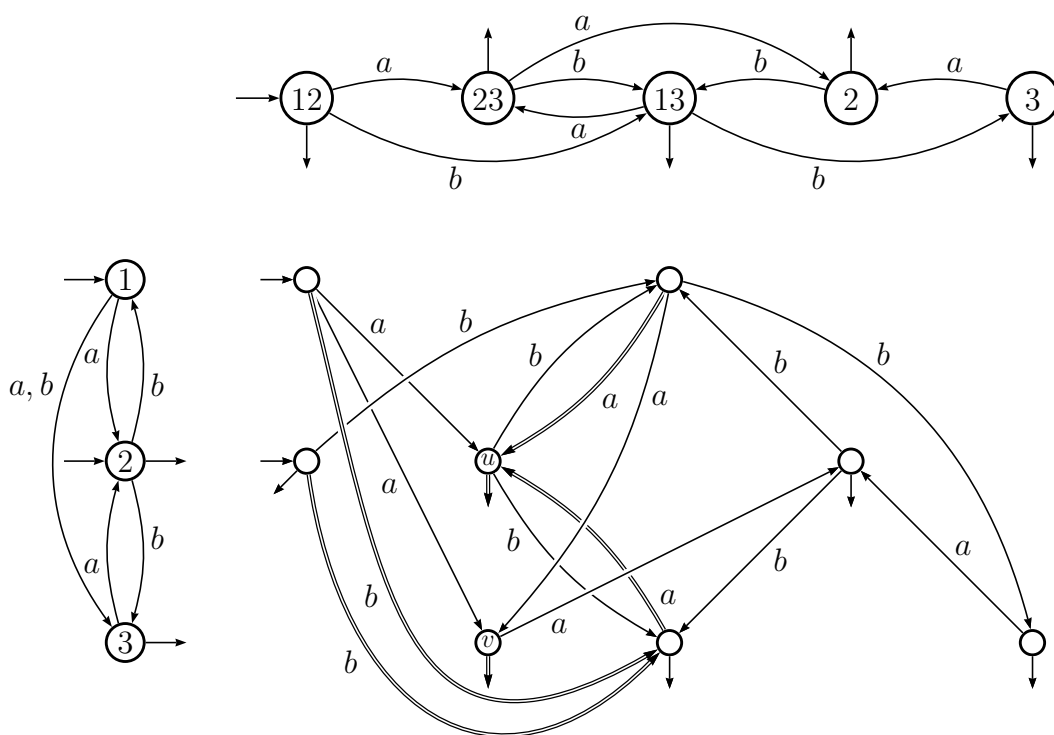


Figure 8: L'automate \mathcal{A} , son déterminisé, et son revêtement de Schützenberger