MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE

COURS 2-16 “MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS”

2 Décembre 2011 — Examen (1)

Livres et ordinateurs interdits — Notes de cours et notes personnelles autorisées

La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent pas vous effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui “sécherait” sur une question de chercher à en résoudre une autre. Par ailleurs, nous attacherons la plus grande importance à la qualité, à la clarté et à la précision de la rédaction.

I. Exercices sur les relations rationnelles

1 .— Une relation binaire $R \subseteq A^* \times B^*$ est *fonctionnelle* si c'est le graphe d'une fonction partielle (pour tout $u \in A^*$, $v_1, v_2 \in B^*$, la condition $(u, v_1), (u, v_2) \in R$ implique $v_1 = v_2$). Montrer que le complémentaire d'une relation fonctionnelle rationnelle est une relation rationnelle.

2 .— Montrer que pour tout $k, \ell \geq 0$, pour tout $R \in \mathrm{Rat}\,(\mathbb{N}^k)$ et pour tout morphisme (additif) $f\colon \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}^k$, on a $f^{-1}(R) \in \mathrm{Rat}\,(\mathbb{N}^\ell)$.

3 .— Montrer que le problème suivant est indécidable:

Entrée: une relation $R \in \mathrm{Rat}\,(A^* \times B^*)$;

Question: R est-elle synchrone?

Suggestion. Etant donnée une instance de PCP: $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \in A^* \times A^*$ *on pourra considérer des relations de la forme* S_1R_1 *et* S_2R_2 *où* S_1 *et* S_2 *sont des relations synchrones dans* $\{0,1\}^* \times 1^*$ *et où* R_1 *et* R_2 *codent les deux suites des* u_i *et des* v_i *respectivement, comme vu en cours.*

II. Sur les supports des séries $\mathbb{Z}$-rationnelles

4 .— Montrer que tout langage rationnel est le support d'une série $\mathbb{Z}$-rationnelle.

5 .— Donner un exemple de $\mathbb{Z}$-automate tel que le support de la série qu'il réalise n'est pas un langage rationnel.

6 .— Montrer que la famille des supports des séries $\mathbb{Z}$-rationnelles est fermée pour les opérations rationnelles et par intersection.

III. Série énumératrice d'un langage

Dans la suite, A est un alphabet fini, totalement ordonné par $<$. L'ordre *radiciel* $\prec$ sur A^* est défini par

$$u \prec v \qquad \text{si} \quad \begin{cases} \text{ou bien} \quad |u| < |v| \ , \\ \text{ou bien} \quad |u| = |v| \, , \quad u = w\,a\,u' \, , \quad v = w\,b\,v' \quad \text{et} \quad a < b \ . \end{cases}$$

L'ordre radiciel est un *bon ordre*, c'est-à-dire que tout ensemble non vide de A^* a un plus petit élément; il peut être utilisé pour *énumérer* tout sous-ensemble de A^*.

Pour tout langage L de A^*, on note π_L la fonction de L dans $\mathbb{N}$ qui associe à chaque mot w de L le nombre de mots de L qui sont plus petits que w dans l'ordre radiciel. L'objet de cet exercice est de montrer que la série

$$\mathbf{E}_L = \sum_{w \in L} (\pi_L(w) + 1)\, w$$

est une série $\mathbb{N}$-rationnelle quand L est rationnel et de décrire un moyen efficace de calculer $\pi_L(w)$.

7 .— Pour tout a dans A, on note A_a l'ensemble des lettres de A plus petites que a:

$$A_a = \{b \in A \mid b < a\} \quad .$$

Pour tout mot u dans A^*, on note $P(u)$ l'ensemble des mots de A^* (strictement) plus petits que u dans l'ordre radiciel:

$$P(u) = \{v \in A^* \mid v \prec u\} \quad .$$

Montrer que $P(u)$ peut être défini par récurrence sur la longueur de u par

$$\begin{aligned} & P(1_{A^*}) = \emptyset \quad , \\ \forall u \in A^*\,,\ \forall a \in A \qquad & P(u\,a) = 1_{A^*} \cup uA_a \cup P(u)A \quad . \end{aligned}$$

8 .— Soient L un langage rationnel, $\mathcal{A} = \langle\, Q, A, E, I, T\,\rangle$ un automate booléen *non ambigu* qui accepte L, et (λ, μ, ν) la $\mathbb{N}$-représentation (de dimension $k = \mathrm{card}\,(Q)$) qui lui est associée.

Si K est un ensemble (fini) de mots de A^*, on note $\mu\,(K) = \sum_{w \in K} \mu\,(w)$. Montrer que pour tout K fini, on a:

$$\lambda \cdot \mu\,(K) \cdot \nu = \mathrm{card}\,(K \cap L) \quad .$$

9 .— Montrer qu'il existe une $\mathbb{N}$-représentation (η, κ, ζ), de dimension $2\,k+1$, telle que pour tout mot w de A^* on a:

$$\eta \cdot \kappa\,(u) \cdot \zeta = \mathrm{card}\,(\{v \in L \mid v \prec u\}) \quad .$$

[*On pourra utiliser, outre λ, μ, et ν, les matrices $\sigma = \mu\,(A)$ et, pour tout a dans A, $\sigma_a = \mu\,(A_a)$, comme blocs constituants de (η, κ, ζ).*]

10 .— En déduire que $\mathbf{E}_L$ est une série $\mathbb{N}$-rationnelle. Quelle est la dimension de la représentation que l'on déduit de cette déduction?

11 .— Donner un algorithme qui calcule $\pi_L(w)$ en $6\,\ell\,k^2$ operations (à peu près), où ℓ est la longueur de w.