

Leçon 2 — Exercices

1 .— Expressions rationnelles.

- (a) Donner des expressions rationnelles pour les graphes des relations « ordre lexicographique » et « ordre radiciel » sur $\{a, b\}^*$.
- (b) Donner des expressions rationnelles pour les graphes des relations « facteurs » et « sous-mots » sur $\{a, b\}^*$.

2 .— Lemme d'itération. Soit $\theta: A^* \rightarrow B^*$ une relation rationnelle.

- (a) Montrer qu'il existe un entier N tel que pour couple (u, v) dans $\widehat{\theta}$ dont la longueur¹ est supérieure à N il existe une factorisation

$$(u, v) = (s, t)(x, y)(w, z)$$

telle que: (i) $1 \leq |x| + |y| \leq N$ et (ii) $(u, v) = (s, t)(x, y)^*(w, z) \subseteq \widehat{\theta}$.

- (b) Montrer que la fonction *miroir* $\rho: A^* \rightarrow A^*$:

$$\rho(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_n a_{n-1} \cdots a_1 ,$$

n'est pas une relation rationnelle.

3 .— Conjugaison. Soit $\text{Conj}: A^* \rightarrow A^*$ la relation qui à un mot w fait correspondre l'ensemble de ses *conjugués*: $\text{Conj}(w) = \{vu \mid u, v \in A^* \quad uv = w\}$.

- (a) Montrer que $\text{Conj}(L)$ est rationnel quand L l'est.
- (b) Donner un transducteur qui à un mot quelconque w de $\{a, b\}^*$ associe le mot obtenu en plaçant la première lettre de w à la fin.
- (c) Composer ce transducteur avec lui-même.
- (d) Montrer que Conj n'est pas une relation rationnelle.

¹La longueur d'un couple est la somme des longueurs de ses composantes.