MPRO - Examen du module FAT

L. Decreusefond, P. Moyal, A. Vergne

Janvier 2017

Un capteur est un équipement peu cher, de petite taille (quelques centimètres) dotés de fonctions rudimentaires comme la mesure de la température, de pression, d'humidité, etc. et l'envoi des données régulièrement à un serveur de collecte. Il existe maintenant des capteurs sans fil à récupération d'énergie. La batterie est alimentée par des cellules solaires forcément petites donc l'énergie est comptée pour chacune des opérations effectuées par un capteur.

On se focalise ici sur l'envoi des paquets par un capteur. L'énergie est comptée en « paquets d'énergie » (PE) : il faut un PE pour envoyer un paquet de données (PD). L'état d'un capteur est donc caractérisé par le couple constitué de son nombre de PD en attente et de son nombre de PE en stock.

Dans un premier temps, on considère que le temps d'émission du paquet (quelques microsecondes) est négligeable devant le temps de recharge de la batterie (de l'ordre de la seconde). On ne peut avoir alors que des états de la forme :

— un nombre nul de PE et un nombre positif ou nul de PD en attente,

— un nombre nul de PD et un nombre positif ou nul de PE en stock.

En effet, si on a n PD et m PE, l'hypothèse de transmission immédiate implique que l'on se retrouve instantanément en $(n-m, 0)$ ou $(0, m-n)$, selon que $n \geq m$ ou le contraire. La batterie a une capacité de stockage limitée à E et le buffer de paquets a une taille de D. L'espace d'états est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{(n, m) \in \{0, \cdots, D\} \times \{0, \cdots, E\},\ n = 0 \text{ ou } m = 0\} \\ &= \Big\{(0, m),\, m \in \{0, \cdots, E\}\Big\} \times \Big\{(n, 0),\, n \in \{0, \cdots, D\}\Big\}.\end{aligned}$$

On définit donc le processus $X = \Big((X_1(t),\, X_2(t)),\, t \geq 0\Big)$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ où

— $X_1(t)$ est le nombre de PD en attente,

— $X_2(t)$ est le nombre de PE en stock.

Les arrivées de PD à transmettre se font selon un processus de Poisson d'intensité λ_d et la « moisson » des paquets d'énergie se fait selon un Poisson d'intensité λ_e.

Pour compliquer le tout, il y a des fuites d'énergie : aux instants d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité μ, indépendant de tout le reste, on perd un PE s'il y en a au moins un en stock.

On suppose pour l'instant que E et D sont finis.

1. Ecrire les taux de transition du processus X.

2. Est-ce que X_1, respectivement X_2, est un processus de Markov ?

3. Pourquoi X a t'il une probabilité stationnaire unique ?

On note π cette probabilité stationnaire. On pose

$$\rho = \lambda_d/\lambda_e \text{ et } \theta = \lambda_e/(\lambda_d + \mu).$$

4. Exprimer $\pi(n, 0)$ en fonction de $\pi(0, 0)$. Même question pour $\pi(0, m)$.

5. Quelle est l'équation satisfaite par $\pi(0, 0)$?

6. Quelle est la condition de stabilité si E est fini et $D = +\infty$?

7. A quelle condition le système est stable si D et E sont infinis ? Calculer $\pi(0, 0)$ dans ce cas.

8. Que se passe-t-il si $\mu = 0$ et $E = D = +\infty$?

On suppose dorénavant que $E = D = +\infty$, que $\mu > 0$ et que la condition de stabilité est satisfaite.

Pour une file M/M/1 de paramètres α (pour les arrivées) et β (pour les services), on appelle throughput, « le débit utile de sortie à l'état stationnaire »,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n \ \beta \ \textit{où } \rho = \alpha/\beta.$$

On commence la somme à $n = 1$ puisqu'il n'y pas de sortie quand il n'y a pas de clients dans le système. Au final, cela vaut $\rho\beta = \alpha$.

Pour notre modèle on définit les quantités :

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n, 0)\lambda_e, \qquad T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n, 0)\lambda_d, \qquad T_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \pi(0, m)\lambda_e$$

$$T_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \pi(0, m)\lambda_d, \qquad T_5 = \sum_{m=1}^{\infty} \pi(0, m)(\lambda_d + \mu).$$

9. Trouver la bonne combinaison de variables choisies parmi $T_1, \cdots, T_5$ qui donne le thoughput de notre modèle. Calculer T.

10. Est-ce que ce résultat était prévisible par un raisonnement qualitatif a priori ?

11. Quelle est la probabilité de l'ensemble $\mathcal{A} = \{(n, m) \in \mathcal{E},\ m > 0\}$?

12. En déduire le pourcentage de paquets qui sont immédiatement émis.

Le capteur vieillissant, les fuites d'énergie sont de plus en plus importantes, ce que l'on représente en disant que μ tend vers l'infini.

13. Que deviennent le throughput et la probabilité d'émission immédiate dans ce cas ?

14. Quel modèle simple du système peut faire l'ingénieur pressé quand μ est arbitrairement grand ?

On suppose maintenant que la batterie est toujours en bon état donc $\mu > 0$ est fixé. Mais les cellules solaires sont obscurcies par des poussières et ne fonctionnent donc pas à plein rendement.

15. Quel paramètre est affecté et de quelle manière ? Que se passe-t-il dans les cas extrêmes ?

On suppose $\mu = 0$, $D = E = 2$ mais la transmission n'est plus immédiate. On considère que le temps d'émission d'un paquet suit une loi exponentielle de paramètre τ.

16. Comment modifier le modèle pour prendre en compte cette nouvelle hypothèse ?

17. Ecrire les taux de transition et les équations de balance.

Fin du problème

Corrigé

1) Les transitions sont de la forme

- $(n, 0) \longrightarrow (n+1, 0)$ au taux $\lambda_d \, \mathbf{1}_{n<D}$ (arrivée d'un PD sans PE en stock),
- $(n, 0) \longrightarrow (n-1, 0)$ au taux λ_e (arrivée d'un PE),
- $(0, m) \longrightarrow (0, m+1)$ au taux $\lambda_e \mathbf{1}_{m<E}$ (arrivée d'un PE sans PD en attente),
- $(0, m) \longrightarrow (0, m-1)$ au taux $\mu \mathbf{1}_{m>0} + \lambda_d$ (arrivée d'un PD ou fuite d'un PE).

2) Non, quand X_1 atteint 0, son temps de séjour n'est pas exponentiel : il y reste tant que X_2 n'est pas revenu à 0.

3) Irréductible + espace d'états fini.

4) Par récurrence,

$$\pi(n, 0) = \pi(0, 0) \left(\frac{\lambda_d}{\lambda_e} \right)^n \cdot$$

On montre de la même manière que

$$\pi(0, m) = \pi(0, 0)\theta^m.$$

5) L'équation de normalisation est

$$\pi(0, 0) \left(1 + \sum_{n=1}^{D} \rho^n + \sum_{m=1}^{E} \theta^m \right) = 1$$

6) Pour que la série soit sommable, il faut que $\lambda_d < \lambda_e$.

7) Quand $D = +\infty$, il faut aussi que $\lambda_e < \lambda_d + \mu$. Au final, cela donne

$$\lambda_d < \lambda_e < \lambda_d + \mu.$$

On doit avoir

$$\pi(0, 0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n + \sum_{m=1}^{\infty} \theta^m \right) = 1$$

soit

$$\pi(0, 0) \left(1 + \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\theta}{1-\theta} \right) = 1.$$

Donc

$$\pi(0, 0) = \frac{(1-\rho)(1-\theta)}{1-\rho\theta} \cdot$$

8) Si $\mu = 0$, le système ne peut pas être stable, soit le nombre de PD tend vers l'infini, soit c'est le nombre de PE, suivant que $\lambda_d > \lambda_e$ ou le contraire.

9) On a $T = T_1 + T_4$. Soit

$$
\begin{aligned}
T &= \pi(0,0)\left\{\lambda_e \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n + \lambda_d \sum_{m=1}^{\infty} \theta^m\right\} \\
&= \frac{(1-\rho)(1-\theta)}{1-\rho\theta}\left\{\lambda_e \frac{\rho}{1-\rho} + \lambda_d \frac{\theta}{1-\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{1-\rho\theta}\left\{1-\theta+(1-\rho)\theta\right\}\lambda_d \\
&= \lambda_d.
\end{aligned}
$$

10) Le système est sans perte (tant que le buffer est de taille infinie). A l'équilibre, ce qui rentre égale ce qui sort soit λ_d.

11) C'est simplement

$$
\pi(0,0)\sum_{m=1}^{\infty}\theta^m = \frac{1-\rho}{1-\rho\theta}\,\theta = \frac{\lambda_e-\lambda_d}{\lambda_d+\mu}\,\frac{\mu}{\lambda_d+\mu}.
$$

12) Pour qu'un paquet soit immédiatement émis, il doit trouver de l'énergie en stock donc que l'état du système soit dans $\mathcal{A}$ au moment de son arrivée. D'après PASTA, le pourcentage de clients qui arrivent à un tel moment est égal à la probabilité de cet ensemble, soit le calcul de la question 11.

13) Le throughput ne dépend pas de μ, la probabilité d'émission immédiate tend vers 0 car $\theta \to 0$.

14) Dans ce cas, les PE ne sont jamais stockés puisqu'ils disparaissent quasi instantanément. On se retrouve avec une seule composante, le nombre de paquets en attente. On a donc une M/M/1 de paramètre λ_d et λ_e. On remarque d'ailleurs que

$$
\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\rho)(1-\theta)}{1-\rho\theta} = 1-\rho
$$

qui est bien la constante de normalisation de la M/M/1.

15) C'est λ_e qui tend vers 0. Si λ_d est inchangé, le système devient instable car la première condition de stabilité n'est pas satisfaite.