MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
COURS 2-16 "MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS"

3 Décembre 2014 — Examen (1) — Corrigé

I. Exercice et problème sur les fonctions régulières de coût

Exercice

1 .— *Donner un B-automate pour la fonction qui à chaque mot sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ associe le nombre d'occurrences de a avant la première occurrence de c, et 0 s'il n'y a pas d'occurrences de c.*

Correction : Trop long à écrire en LaTeX.

2 .— *Donner un monoïde de stabilisation pour cette fonction, ainsi que l'idéal correspondant.*

Correction : On utilise les éléments suivants:

- 1 : les mots sans a ni c,
- a : les mots sans b, au moins 1 a, et peu de a,
- $a^\sharp$: les mots sans c possédant un grand nombre de a,
- c : les mots possédant un c et peu de a avant la première occurrence de c,
- $a^\sharp c$: les mots possédant un c et un grand nombre de a avant sa première occurrence.

On obtient la table suivante:

	1	a	$a^\sharp$	c	$a^\sharp c$	$\sharp$
1	1	a	$a^\sharp$	c	$a^\sharp c$	1
a	a	a	$a^\sharp$	c	$a^\sharp c$	$a^\sharp$
$a^\sharp$	$a^\sharp$	$a^\sharp$	$a^\sharp$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp$
c	c	c	c	c	c	c
$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$	$a^\sharp c$

L'ordre est $a^\sharp \leq a$, puis (produit par c à droite), $a^\sharp c \leq c$.

L'idéal est $\{a^\sharp c\}$. (attention au cas sans c !)

Problème

Étant donné un mot $u = a_1 \ldots a_k$ *et* $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, *le mot* $u|_I$ *est le mot* $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_\ell}$, *où* $I = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$, *et* $i_1 < \cdots < i_\ell$. *Un mot de la forme* $u|_I$ *est appelé un* sous-mot *de* u. *Posons*

$$|u|_v =^{def} |\{I \ : \ u|_I = v\}| ,$$

c-à-d., le nombre de façons distinctes de voir v *comme un sous-mot de* u. *Posons également*

$$|u|_v^{disj} =^{def} \mathsf{max}\{n \ : \ I_1, \ldots, I_n \text{ disjoints deux à deux, } u|_{I_j} = v \text{ pour tout } j\},$$

c-à-d., le nombre maximal d'occurrences deux à deux disjointes de v *dans* u.

Nous noterons par $|\cdot|_v$ *(resp.* $|\cdot|_v^{disj}$*) la fonction qui à chaque mot* u *associe* $|u|_v$ *(resp.,* $|u|_v^{disj}$*).*

1 .— *Sur l'alphabet* $\{a, b\}$, *montrer que* $|\cdot|_a \approx |\cdot|_{aa} \approx |\cdot|_{aa}^{disj}$.

Correction : $|\cdot|_a \leq 2|\cdot|_{aa}^{disj} + 1$ et $|\cdot|_{aa}^{disj} \leq |\cdot|_{aa} \leq (|\cdot|_a)^2$.

2 .— *Montrer que (a)* $|\cdot|_{ab} \not\approx |\cdot|_{ba}$ *et (b)* $|\cdot|_{ab} \not\approx |\cdot|_{ab}^{disj}$.

Correction : La fonction $|\cdot|_{ab}$ est constante égale à 0 sur b^*a^*. En revanche, $|b^n a^n|_{ba} = n^2$, et donc $|\cdot|_{ba}$ n'est pas bornée sur b^*a^*. Ainsi, $|\cdot|_{ba} \not\preceq |\cdot|_{ab}$.

Par ailleurs, $|\cdot|_{ab}$ n'est pas borné sur ab^*, alors que $|\cdot|_{ab}^{disj}$ l'est.

3 .— *Montrer que* $|\cdot|_{uaav}^{disj} \approx |\cdot|_{uav}^{disj}$.

Correction : Bien entendu $|\cdot|_{uaav}^{disj} \leq |\cdot|_{uav}^{disj}$ car toute occurrence de $uaav$ contient une occurrence de uav. Pour la réciproque, supposons que $|\cdot|_{uav}^{disj} = n$. Considérons maintenant deux occurrences disjointes de uav, alors le a de l'une est à la gauche du a de l'autre. Ainsi, en utilisant (une partie) des positions de ces deux sous-mots, on obtient une occurrence de $uaav$. On obtient donc $|\cdot|_{uav}^{disj} \leq 2|\cdot|_{uaav}^{disj} + 1$.

4 .— *Montrer que* $|\cdot|_{ab} \approx b^*(b^B a^B)^B a^*$.

Correction : Soit $u \in b^*(b^{\leq n} a^{\leq n})^{\leq n} a^*$, alors il y a au plus n^2 occurrences de a qui sont à la gauche d'un b et au plus n^2 occurrences de b qui sont à la droite d'un a. Ainsi, il existe au plus n^4 occurrences du sous-mot ab.

Réciproquement, supposons qu'un mot u contienne n occurrences du sous-mot ab. Si le mot commence par un b, celui-ci ne peut servir dans une occurrence du sous-mot ab. Il peut être omis sans changer le nombre d'occurrences du sous-mot ab. Ainsi, sans perte de généralités, le mot commence par un a et termine par un b. Comme le mot commence par un a et qu'il y a au plus n occurrences du sous-mot ab, il ne peut contenir que n occurrences de b. Similairement, il ne peut contenir que n occurrences de a. Ainsi, il appartient à $(a^{\leq n}b^{\leq n})^{\leq n}$.

5 .— *Montrer que* $|\cdot|_{ab}^{disj} \approx b^*(a^B b^*)^B(a^* b^B)^B a^*$.

Correction : Soit $u \in \overbrace{b^*(\mathbf{a}^{\leq n}b^*)^{\leq n}}^{\text{partie droite}}\overbrace{(a^*\mathbf{b}^{\leq n})^{\leq n}}^{\text{partie gauche}}a^*$. Considérons une occurrence du sous-mot ab dans u. Soit il commence dans la "partie gauche" (c.à.d avant le milieu de la B-expression), alors nécessairement il utilise l'une des lettres en gras **a**, soit il commence dans la "partie droite", auquel cas il se termine aussi dans la "partie droite", et il utilise donc l'une des lettres en gras **b**. Dans tous les cas il utilise l'une des lettres en gras. Comme ce mot contient $2n^2$ lettres en gras au maximum, il ne peut donc y a voir qu'au plus $2n^2$ occurrences de sous-mots ab disjointes.

Réciproquement, supposons que u n'appartienne pas à $b^*(\mathbf{a}^{\leq n}b^*)^{\leq n}(a^*\mathbf{b}^{\leq n})^{\leq n}a^*$, alors

- S'il y a plus de n alternances de a et de b. Auquel cas, il y a nécessairement au moins n occurrences du facteur ab, et donc n occurrences disjointes du sous-mot ab.
- Sinon, il existe un facteur de la forme a^{n+1}, et à sa droite un facteur de la form b^{n+1}. Il y a donc au moins $n+1$ occurrences disjointes du sous-mot ab.

6 .— *Soit P_u le langage des mots possédant u comme sous-mot, et tels qu'aucun préfixe strict ne contienne u comme sous-mot. Soit S_u le langage des mots possédant u comme sous-mot, et tels qu'aucun suffixe strict ne contienne u comme sous-mot. Montrer que P_u et S_u sont des langages rationnels.*

Correction : Si u s'écrit $a_1 \dots a_k$, alors $A^*a_1A^*a_2 \dots a_kA^*$ est l'ensemble (rationnel) des mots contenant u comme sous-mot. De même, $A^*a_1A^*a_2 \dots a_kA^+$ est l'ensemble (rationnel) des mots ayant un préfixe strict contenant u comme sous-mot. Le langage P_u est la différence de ces deux langages, et la différence de deux langages rationnels est rationnelle. Par symétrie, le langage S_u est aussi rationnel.

7 .— *Soit u un mot, montrer qu'il existe une fonction de correction α telle que pour tout mot w,*

$$|w|_u \approx_\alpha \mathsf{max}_{u=vav'}\{|w'|_a \ : \ w \in P_v w' S_{v'}\} \ .$$

En déduire que la fonction de coût $|\cdot|_u$ est régulière.

Correction: Soit $n = \mathsf{max}_{u=vav'}\{|w'|_a \ : \ w \in P_v w' S_{v'}\}$. Si $n = 0$, alors $|w|_u \geq n$. Sinon, $n = |w'|_a$ pour un certain choix de $u = vav'$ et $|w'|_a \ : \ w \in P_v w' S_{v'}$. Il s'ensuit que l'on peut trouver n occurrences du sous-mot u dans w, qui ne diffèrent que par la position du a. Là encore, $|w|_u \geq n$.

Réciproquement, supposons que u est de longueur k, et que l'on puisse trouver n^k occurrences distinctes du sous-mot u dans w, alors, en utilisant le lemme des tiroirs, il exists une décomposition de u en vav' telle qu'au moins n sous-mots u de w possèdent une position de la lettre a distincte deux à deux. Soit w_p le préfixe minimal de w contenant v et w_s le suffixe minimal de w contenant v', alors $w_p \in P_v$ et $w_s \in S_{v'}$, w s'écrit $w_p w' w_s$, et w' contient au moins n occurrences de a. Ainsi, $|w|_u \geq n$.

Comme χ_{P_v}, $\chi_{S_{v'}}$ et $|\cdot|_a$ sont des fonctions de coût régulières, et que les fonctions de coût régulières sont closes sous max, il s'ensuit que $|\cdot|_u$ est une fonction régulière de coût.

8 .— *Soient u_1, u_2 non vides. Montrer qu'il existe une fonction de correction α telle que pour tout mot w:*

$$|w|^{disj}_{u_1u_2} \approx_\alpha \mathsf{max}_{w=w_1w_2}\mathsf{min}(|w_1|^{disj}_{u_1}, |w_2|^{disj}_{u_2}) \ .$$

On admet que, étant données deux fonctions de coût f, g, alors la fonction de coût $f\bar{\cdot}g$ définie par:

$$f\bar{\cdot}g(w) =^{def} \mathsf{max}_{w=w_1w_2}\mathsf{min}(f(w_1), f(w_2))$$

est aussi régulière.

En déduire que pour tout mot u, $|\cdot|^{disj}_u$ est une fonction régulière de coût.

Correction: Soit $w = w_1w_2$, alors $|w|^{disj}_{u_1u_2} \geq \mathsf{min}(|w_1|^{disj}_{u_1}, |w_2|^{disj}_{u_2})$ car si w_1 possède n occurrences disjointes de u_1, et w_2 possède n occurrences disjointes de u_2, alors en les combinants, on obtient n occurrences disjointes de u_1u_2 comme sous-mot de w_1w_2.

Réciproquement, supposons que w possède $2n$ occurrences disjointes du sous-mot u_1u_2, alors pour chacune d'elle il est possible d'associer l'occurrence γ

de la dernière lettre de u_2 dans la décomposition. Comme il existe $2n$ telles occurrences, il existe une décomposition m tel que γ pour n occurences soit inférieur ou égal à m, et supérieur à m pour les autres occurrences. Ainsi, w se décompose en w_1w_2 avec $|w_1| = m$, et $|w_1|_{u_1} \geq n$ et $|w_2|_{u_2} \geq n$. Cela prouve $|w|^{disj}_{u_1u_2} \leq 2\mathsf{min}(|w_1|^{disj}_{u_1}, |w_2|^{disj}_{u_2})$.

Ainsi, par récurrence sur la longueur de u, $|\cdot|_u$ est régulière: pour $u = a \in A$, $|\cdot|_a$ est régulière (cours). Pour $u = u_1a$, on vient de voir que $|\cdot|^{disj}_{au} \approx |\cdot|^{disj}_{u}\bar{\cdot}|\cdot|_a$, et $|\cdot|^{disj}_{au}$ est donc bien régulière.

Étant donné un langage K, nous étendons les notations du problème par:

$$|u|_K =^{def} |\{I \ : \ u|_I \in K\}| , \qquad \text{et}$$
$$|u|^{disj}_K =^{def} \mathsf{max}\{n \ : \ I_1, \ldots, I_n \text{ disjoints deux à deux, } u|_{I_j} \in K \text{ pour tout } j\}.$$

9 .— *Montrer que $|\cdot|_{K\cup L} \approx \mathsf{max}(|\cdot|_K, |\cdot|_L)$ et $|\cdot|^{disj}_{K\cup L} \approx \mathsf{max}(|\cdot|^{disj}_K, |\cdot|^{disj}_L)$.*

Correction : On a

$$\mathsf{max}(|\cdot|_K, |\cdot|_L) \leq |\cdot|_{K\cup L} \leq |\cdot|_K + |\cdot|_L \leq 2\mathsf{max}(|\cdot|_K, |\cdot|_L), \quad \text{et}$$
$$\mathsf{max}(|\cdot|^{disj}_K, |\cdot|^{disj}_L) \leq |\cdot|^{disj}_{K\cup L} \leq |\cdot|disj_K + |\cdot|disj_L \leq 2\mathsf{max}(|\cdot|^{disj}_K, |\cdot|^{disj}_L) \ .$$

10 .— *Rappelons le lemme de Higman: “tout ensemble de mots incomparables pour la relation sous-mot est fini”. En déduire que pour tout langage L, les fonctions de coût $|\cdot|_L$ et $|\cdot|^{disj}_L$ sont régulières.*

Correction : Remarquons tout d'abord que la relation $K \leq_{sm} L$ entre langages définie comme “tout mot de L possède un sous-mot dans K” est telle que $|\cdot|_K \geq |\cdot|_L$ et $|\cdot|^{disj}_K \geq |\cdot|^{disj}_L$. D'après le lemme de Higman, pour tous langages L, il existe un langage fini F tel que $F \leq_{sm} L$ et $L \leq_{sm} K$: le langage des sous-mots minimaux de L. Ainsi il suffit de se poser la question pour les langages finis.

En utilisant la question précédente, et comme les fonctions régulières de coût sont closes sous max, $|\cdot|_K$ et $|\cdot|^{disj}_K$ sont régulières, et donc $|\cdot|_L$ et $|\cdot|^{disj}_L$ aussi.

II. Problème sur les automates avec multiplicité

Remarque liminaire. *Ce problème était beaucoup trop difficile pour un examen, je le reconnais bien volontiers et présente toutes mes excuses. Cette erreur d'appréciation a été due, en partie, à une solution fausse que j'avais rédigée initialement pour les questions 4 et 8 et qui était elle-même inspirée par la solution d'un exercice de mon livre et dont j'ai découvert la fausseté à cette occasion.*

La notation en revanche n'en a pas été affectée significativement: les questions 7 et 8 ont été neutralisées et les autres, conformément à la remarque liminaire de l'énoncé, ont été notées sur un total dépassant largement la note maximale.

1 .— Soient $\mathcal{A}_1$ l'automate (booléen) de la figure 1 et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ son déterminisé (par la méthode des sous-ensembles). Vérifier que $\widehat{\mathcal{A}_1} \xRightarrow{X_1} \mathcal{A}_1$, avec

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

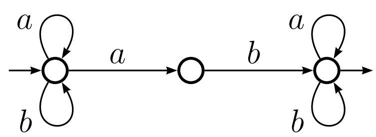

Figure 1: L'automate $\mathcal{A}_1$

Correction : Le déterminisé $\widehat{\mathcal{A}_1}$ est représenté à la figure 2. Les automates $\mathcal{A}_1$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ s'écrivent:

$$\mathcal{A}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \widehat{\mathcal{A}_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \ .$$

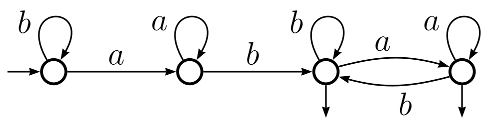

Figure 2: L'automate $\widehat{\mathcal{A}_1}$

On vérifie:

$$(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=(1\ \ 0\ \ 0)\ ,\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\qquad \textit{et}$$

$$\begin{pmatrix}b&a&0&0\\0&a&b&0\\0&0&b&a\\0&0&b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&a&0\\a+b&a&b\\a+b&a&a+b\\a+b&a&a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a+b&a&0\\0&0&b\\0&0&a+b\end{pmatrix}\ ,$$

qui est bien l'identité voulue.

2 .— Soient $\mathcal{A}$ un automate (booléen) et $\widehat{\mathcal{A}}$ son déterminisé. Montrer qu'il existe une matrice booléenne X telle que $\widehat{\mathcal{A}} \overset{X}{\Longrightarrow} \mathcal{A}$.

Correction: Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, \mu, T\,\rangle$ un automate booléen de dimension Q et $\widehat{\mathcal{A}} = \left\langle\, \widehat{I}, \widehat{\mu}, \widehat{T}\,\right\rangle$ son déterminisé, de dimension R, avec

$$R = \{I\cdot\mu(w)\mid w\in A^*\}\quad .$$

[À l'imitation de la matrice X_1 de la question précédente,] soit X_R la $R{\times}Q$-matrice (booléenne) dont la J-ième ligne est J. Par définition du déterminisé, on a:

$$\widehat{I}_J=\begin{cases}1 & \textit{si}\quad J=I\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}\ ,\qquad \widehat{\mu}(a)_{J,K}=\begin{cases}1 & \textit{si}\quad K=J\cdot\mu(a)\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}\ ,$$

$$\textit{and}\qquad \widehat{T}_J = J\cdot T\quad .$$

Il s'ensuit alors que la J-ème ligne de $\widehat{\mu}(a)\cdot X_R$ est égale à K avec $K = J\cdot\mu(a)$ et que puisque la J-ième ligne de X_R est J, la J-ième ligne de $X_R\cdot\mu(a)$ est $J\cdot\mu(a) = K$. Les égalités évidentes $\widehat{I}\cdot X_R = I$ et $\widehat{T}_J = X_R\cdot T$ achèvent la preuve de ce que $\widehat{\mathcal{A}} \overset{X_R}{\Longrightarrow} \mathcal{A}$.

3 .— Soit X une $R{\times}Q$-matrice[1] booléenne sans lignes ou colonnes identiquement nulles. Montrer qu'il existe un ensemble P et deux matrices d'amalgamation H et K, H de dimension $P\times R$ et K de dimension $P\times Q$, telles que $X = {}^{\mathsf{t}}H\ K$.

[1] Pour rester cohérent avec les notations des questions 1 et 2, j'ai été amené à intervertir le rôle de Q et R par rapport à mes notations habituelles.

Calculer H_1 et K_1 telles que $X_1 = {}^{\mathsf{t}}H_1\ K_1$, où X_1 est la matrice de la question 1.

Correction : Soit P l'ensemble des coefficients non nuls de X :

$$P = \{(r,q) \mid X_{r,q} = 1\} \subseteq R \times Q \ .$$

Soient $\pi_R \colon P \to R$ et $\pi_Q \colon P \to Q$ les traces sur P des deux projections de $R \times Q$ sur R et Q respectivement et soient H et K les matrices définies par les applications π_R et π_Q respectivement:

$$H_{(r,q),r'} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad r' = r \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} , \qquad \textit{et} \qquad K_{(r,q),q'} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad q' = q \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} .$$

Comme X n'a aucune ligne (resp. colonne) identiquement nulle, π_R (resp. π_Q) est surjective, et H (resp. K) n'a aucune colonne nulle. Par ailleurs, H et K n'ont aucune ligne nulle et sont ainsi deux matrices d'amalgamation.

Pour tout (r,q) dans $R \times Q$, il vient:

$$\left({}^{\mathsf{t}}H \cdot K\right)_{r,q} = \bigvee_{(r',q') \in P} {}^{\mathsf{t}}H_{\,r,(r',q')} \wedge K_{(r',q'),q} = {}^{\mathsf{t}}H_{\,r,(r,q)} \wedge K_{(r,q),q}$$

puisque ${}^{\mathsf{t}}H_{\,r,(r',q')} = 0$ si $r \neq r'$ et $K_{(r',q'),q} = 0$ si $q \neq q'$ et

$${}^{\mathsf{t}}H_{\,r,(r,q)} \wedge K_{(r,q),q} = X_{r,q}$$

par définition: H et K répondent bien au problème.

L'application de ce calcul à X_1 donne:

$${}^{\mathsf{t}}H_1 = H_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

4 .— Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux automates booléens émondés tels que $\mathcal{B}$ est conjugué à $\mathcal{A}$ par une matrice X. Montrer qu'il existe un automate $\mathcal{C}$ dont $\mathcal{B}$ est un co-quotient et $\mathcal{A}$ un quotient.

Dans le cas où $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{A}}$, quel est l'automate $\mathcal{C}$ ainsi construit?

Correction : *On préfère la description par représentation: $\mathcal{A} = \langle\, I, \mu, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, \kappa, U \,\rangle$, de dimension Q et R respectivement.*

Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont émondés, X n'a ni lignes ni colonnes identiquement nulles. En effet, si la colonne q de X est identiquement nulle, l'état q n'est pas accessible dans $\mathcal{A}$; si la ligne r de X est identiquement nulle, l'état r n'est pas accessible dans ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ donc r n'est pas co-accessible dans $\mathcal{B}$.

Soit $X = {}^{\mathsf{t}}H \cdot K$ la factorisation de X établie à la question précédente dont on utilise les notations. On pose $L = J \cdot {}^{\mathsf{t}}H$ et on a $L \cdot K = I$ puisque $J \cdot X = I$; on pose $V = K \cdot T$ et on a $U = {}^{\mathsf{t}}H \cdot V$ puisque $U = X \cdot T$. Et on vérifie que $L = (J \times I) \cap P$ et $V = (U \times T) \cap P$.

On définit alors l'automate $\mathcal{C} = \langle\, L, \omega, V \,\rangle$ par

$$\forall a \in A\,,\ \forall (r,q),(r',q') \in P \qquad \omega(a)_{(r,q),(r',q')} = \kappa(a)_{r,r'} \wedge \mu(a)_{q,q'} \quad . \tag{1}$$

C'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est le sous-automate de $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ obtenu en ne gardant que les états dans $P \subseteq R \times Q$. Il reste à établir que

$$\mathcal{B} \xRightarrow{{}^{\mathsf{t}}H} \mathcal{C} \xRightarrow{K} \mathcal{A} \quad ,$$

qui est bien la définition que $\mathcal{B}$ est un co-quotient *de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ un* quotient *de $\mathcal{C}$.*

Il faut prouver que, pout tout a dans A,

$$\kappa(a) \cdot {}^{\mathsf{t}}H = {}^{\mathsf{t}}H \cdot \omega(a) \qquad \text{et} \qquad \omega(a) \cdot K = K \cdot \mu(a) \quad . \tag{2}$$

Etablissons l'égalité de droite, c'est-à-dire que *$\pi_Q \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ est un Out-morphisme.*

Puisque K est monomiale en ligne et $K_{(r,q),q'} = 1$ si, et seulement si, $q = q'$, la ligne (r,q) de $K \cdot \mu(a)$ est égale à la ligne q de $\mu(a)$, soit:

$$\forall q' \in Q \qquad (K \cdot \mu(a))_{(r,q),q'} = \mu(a)_{q,q'} \quad . \tag{3}$$

D'autre part, pour tout (r,q) dans P et tout q' dans Q, on a:

$$\begin{aligned}
(\omega(a) \cdot K)_{(r,q),q'} &= \bigvee_{(r'',q'') \in P} \omega(a)_{(r',q'),(r'',q'')} \wedge K_{(r'',q''),q'} \\
&= \bigvee_{r'' \in R} \omega(a)_{(r,q),(r'',q')} \wedge K_{(r'',q'),q'} \\
&= \bigvee_{r'' \in R} \big(\kappa(a)_{r,r''} \wedge \mu(a)_{q,q'}\big) \wedge K_{(r'',q'),q'} \\
&= \mu(a)_{q,q'} \wedge \bigvee_{r'' \in R} \big(\kappa(a)_{r,r''} \wedge K_{(r'',q'),q'}\big) \quad .
\end{aligned} \tag{4}$$

Si $\mu(a)_{q,q'} = 0$ *les membres gauches de (3) et (4) sont nuls, donc égaux. Si* $\mu(a)_{q,q'} = 1$*, et donc si* $(K \cdot \mu(a))_{(r,q),q'} = 1$*, écrivons que* $\kappa(a)$ *est conjugué à* $\mu(a)$ *par* X*, c'est-à-dire* $\kappa(a) \cdot X = X \cdot \mu(a)$ *soit, pour le coefficient* (r, q')*:*

$$(X \cdot \mu(a))_{r,q'} = \bigvee_{q'' \in Q} \left(X_{r,q''} \wedge \mu(a)_{q'',q'} \right)$$
$$= (\kappa(a) \cdot X)_{r,q'} = \bigvee_{r'' \in R} \left(\kappa(a)_{r,r''} \wedge X_{r'',q'} \right) \ .$$

Or, $(X \cdot \mu(a))_{r,q'} = 1$ *puisque* $\mu(a)_{q,q'} = 1$ *et* $X_{r,q} = 1$ *(puisque* (r, q) *est dans* P*). Ainsi, on doit avoir*

$$(\kappa(a) \cdot X)_{r,q'} = \bigvee_{r'' \in R} \left(\kappa(a)_{r,r''} \wedge X_{r'',q'} \right) = 1 \ , \tag{5}$$

c'est-à-dire qu'il existe r'' *dans* R *tel que*

$$\kappa(a)_{r,r''} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_{r'',q'} = 1$$

qui est exactement la condition nécessaire pour que le membre gauche de (4) vaille 1, ce qu'il fallait démontrer.

L'égalité de gauche de (2) s'établit en reprenant la même preuve *à partir de l'hypothèse que* ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{A}$ *est conjugué à* ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ *par* ${}^{\mathsf{t}}X = {}^{\mathsf{t}}K \cdot H$ *qui donnera que* ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{C}$ *est conjugué à* ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ *par* H*, soit que* $\mathcal{B}$ *est conjugué à* $\mathcal{C}$ *par* ${}^{\mathsf{t}}H$*, ce que l'on veut démontrer.*

Si $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{A}}$*, le déterminisé de* $\mathcal{A}$*, on observe que les coefficients non nuls de* X_R *sont les couples* (P, p) *avec* P *dans* $R = \{I \cdot \mu(w) \mid w \in A^*\}$ *et* p *dans* P *et que les transitions de* $\mathcal{C}$ *données par (1) sont de la forme:*

$$(P, p) \xrightarrow[\mathcal{C}]{a} (S, s) \qquad \text{avec} \qquad P \xrightarrow[\widehat{\mathcal{A}}]{a} S \quad \text{et} \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} s \ .$$

L'automate $\mathcal{C}$ *est donc le* revêtement de Schützenberger *de* $\mathcal{A}$*.*

Remarque. *On pourrait croire, particulièrement après cette dernière réponse, que la* partie accessible *du produit* $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ *est un automate* $\mathcal{C}$ *qui répond à la question en toute généralité.*

Il n'en est rien, comme le montre le contre-exemple construit en prenant $\mathcal{B} = \mathcal{A} = \mathcal{B}_1$ *représenté à la figure 3 et pour* X *la matrice identité. Le produit* $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1$ *tout entier est accessible et la projection sur la deuxième composante n'est pas un Out-morphisme puisque, en particulier, les états dans l'image inverse de l'état final ne sont pas finals tous les deux.*

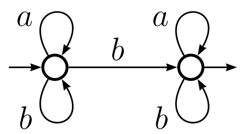

Figure 3: L'automate $\mathcal{B}_1$

5 .— *Un monoïde (commutatif) M sera dit* équisoustractif *si pour tous p, q, r et s dans M tels que $p+q=r+s$ il existe x, y, z et t tels que $p=x+y$, $q=z+t$, $r=x+z$ et $s=y+t$. Un semi-anneau sera dit équisoustractif s'il l'est en tant que monoïde pour l'addition.*

Soient l_1, l_2, …, l_n, k_1, k_2, …, k_m, $n+m$ éléments d'un semi-anneau équisoustractif $\mathbb{K}$ tels que:

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m \quad . \tag{6}$$

Montrer qu'il existe une $n \times m$-matrice M telle que la somme des coefficients de chaque ligne i est égale à l_i et que la somme des coefficients de chaque colonne j est égale à k_j.

Montrer que $\mathbb{N}$ est équisoustractif.

Correction: Par récurrence sur $n+m=N$ et à N fixé, sur n; quitte à faire une transposition, on peut supposer $n \leqslant m$. La propriété est triviale pour les vecteurs ligne, i.e. $n=1$. La propriété pour $n=m=2$ est exactement la définition de l'équisoustractivité.

Sous l'hypothèse (6), on pose $k_1+k_2+\ldots+k_{m-1}=k'$. L'hypothèse de récurrence assure l'existence de nombres h_i et des h'_i tels que $h'_i+h_i=l_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $h'_1+h'_2+\ldots+h'_n=k'$ et $h_1+h_2+\ldots+h_n=k_m$, puis l'existence de la $n \times (m-1)$-matrice qui complète la solution.

Si $p+q=r+s$, on peut supposer $p \leqslant r$ et avec $z=r-p$, on pose $p=x$ et $s=t$, et on a $q=z+t$ et $r=x+z$.

6 .— *Soient $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{B}_2$ les deux $\mathbb{N}$-automates sur $\{z\}^*$ de la figure 4.*

Calculer le coefficient de z^n dans le comportement de $\mathcal{A}_2$ et de $\mathcal{B}_2$.

Montrer que $\mathcal{B}_2 \stackrel{X_2}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_2$, *avec*

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Figure 4: Les automates $\mathcal{A}_2$ (à gauche) et $\mathcal{B}_2$ (à droite)

Correction : Par simple observation, on détermine que $\langle|\mathcal{A}_2|, 1_{z^*}\rangle = 0$ *et* $\langle|\mathcal{A}_2|, z^n\rangle = 2^{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$*: il n'y a qu'un seul calcul pour chaque mot* z^n*, la première transition étiquetée par* z *a pour poids* 1*, les suivantes ont un poids égal à* 2*. De façon analogue, on détermine qu'il en est de même pour* $\mathcal{B}_2$*, i.e.* $|\mathcal{B}_2| = |\mathcal{A}_2|$*: il n'y a qu'un seul calcul pour chaque mot* z^n*, les deux premières transitions étiquetées par* z *ont pour poids* 1*, les suivantes ont un poids égal* à 2 *mais,* à *partir de* $n \geqslant 2$*, le poids du calcul est multiplié par* 2*.*

On écrit:

$$\mathcal{A}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathcal{B}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et on calcule:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \\ 0 & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 2z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui établit que $\mathcal{B}_2 \xRightarrow{X_2} \mathcal{A}_2$.

7 .— Soit X *une* $R \times Q$*-matrice à coefficients dans* $\mathbb{N}$ *sans lignes ou colonnes identiquement nulles. Soit* k *la somme des coefficients de* X *et soit* P *l'intervalle* $[1; k]$.

Montrer qu'il existe deux matrices d'amalgamation H *et* K*,* H *de dimension* $P \times R$ *et* K *de dimension* $P \times Q$*, telles que* $X = {}^{\mathsf{t}}H\ K$.

Calculer H_2 *et* K_2 *telles que* $X_2 = {}^{\mathsf{t}}H_2\ K_2$ *, où* X_2 *est la matrice de la question 6.*

Correction : Soit P *l'ensemble défini par:*

$$P = \left\{ \big((r,q), i\big) \in R \times Q \times \mathbb{N} \;\middle|\; X_{r,q} \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant X_{r,q} \right\} .$$

Cet ensemble a k éléments: chaque couple (r,q) apparaît $X_{r,q}$ fois comme première composante d'un élément de P. Soient K la $P{\times}Q$-matrice et H' la $R{\times}P$-matrice définies par

$$K_{p,q} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad \exists r \in R\,,\ \exists i \in \mathbb{N} \quad p = \big((r,q),i\big) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \quad , \qquad \textit{et} \tag{7}$$

$$H'_{r,p} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad \exists q \in Q\,,\ \exists i \in \mathbb{N} \quad p = \big((r,q),i\big) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Par définition, K est monomiale en ligne et comme X n'a aucune ligne ou colonne identiquement nulle, il en est de même de K. Symétriquement, H' est monomiale en colonne par définition et comme X n'a aucune ligne ou colonne identiquement nulle, il en est de même de H'. Ainsi, $H = {}^{\mathsf{t}}H'$ et K sont deux matrices d'amalgamation.

Pour tout (r,q) dans $R{\times}Q$, il vient:

$$(H' \cdot K)_{r,q} = \sum_{p \in P} H'_{r,p} K_{p,q} = \sum_{i=1}^{i=X_{r,q}} H'_{r,((r,q),i)} K_{((r,q),i),q}$$

puisque $H'_{r,((r',q'),i)} = 0$ si $r \neq r'$ et $K_{((r',q'),i),q} = 0$ si $q \neq q'$

$$= X_{r,q} \qquad \textit{par définition} \ ,$$

et $H = {}^{\mathsf{t}}H'$ et K répondent bien au problème.

L'application de cette méthode à X_2 donne:

$${}^{\mathsf{t}}H_2 = H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

8 .— Soient $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T \,\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle\, J, F, U \,\rangle$ deux $\mathbb{N}$-automates émondés tels que $\mathcal{B}$ est conjugué à $\mathcal{A}$ par une matrice X. Montrer qu'il existe un automate $\mathcal{C}$ dont $\mathcal{B}$ est un co-quotient et $\mathcal{A}$ un quotient.

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ de la question précédente, quel est l'automate $\mathcal{C}_2$ ainsi construit?

Correction : *Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont pour dimension Q et R respectivement; comme à la question précédente, la $R \times Q$-matrice X se décompose en $X = {}^{\mathsf{t}}H \cdot K$. où H et K sont de dimension $P \times R$ et $P \times Q$ respectivement, avec:*

$$P = \Big\{ \big((r,q), i \big) \in R \times Q \times \mathbb{N} \,\Big|\, X_{r,q} \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant X_{r,q} \Big\} \quad .$$

Les matrices H et K sont par définition ((7) et (8)) les matrices d'amalgamation correspondant respectivement aux projections

$$\begin{aligned} \pi_R \colon P &\longrightarrow R \\ \pi_R\big(((r,q),i)\big) &= r \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \pi_Q \colon P &\longrightarrow Q \ , \\ \pi_Q\big(((r,q),i)\big) &= q \ . \end{aligned}$$

On va montrer l'existence d'un automate $\mathcal{C} = \langle\, L, G, V \,\rangle$ de dimension P tel que $\pi_R \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ est un In-morphisme et $\pi_Q \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ un Out-morphisme, c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{B} \overset{{}^{\mathsf{t}}H}{\Longrightarrow} \mathcal{C} \overset{K}{\Longrightarrow} \mathcal{A} \quad .$$

Le vecteur L est défini par $L = J \cdot {}^{\mathsf{t}}H$ et on a $L \cdot K = I$ puisque $J \cdot X = I$. Symétriquement, V est défini par $V = K \cdot T$ et on a ${}^{\mathsf{t}}H \cdot V = U$ puisque $X \cdot T = U$.

On va construire la $P \times P$-matrice G comme une $R \times Q$-matrice de blocs, où le bloc d'indice (r,q), $M_{r,q}$, est de dimension $\pi_R^{-1}(r) \times \pi_Q^{-1}(q)$. La multiplication à droite par K (d'une $S \times P$-matrice)[2] réalise la somme des colonnes dont les indices se projettent sur le même élément de Q, donc la condition

$$G \cdot K = K \cdot E \tag{9}$$

détermine la somme des lignes de chaque bloc $M_{r,q}$. Par ailleurs, la multiplication à gauche par ${}^{\mathsf{t}}H$ (d'une $P \times S$-matrice) réalise la somme des lignes dont les indices se projettent sur le même élément de R, donc

$${}^{\mathsf{t}}H \cdot (G \cdot K) = X \cdot E$$

est une $R \times Q$-matrice dont le coefficient (r,q) est la somme des sommes des lignes de $M_{r,q}$. Symétriquement, et pour les raisons susdites, la condition

$${}^{\mathsf{t}}H \cdot G = F \cdot {}^{\mathsf{t}}H \tag{10}$$

[2] Cette notation exprime que la propriété est indépendante de la dimension S. Elle sera utilisée avec $S = P$ et $S = R$ ou $S = Q$.

détermine la somme des colonnes de chaque bloc $M_{r,q}$ et

$$({}^{\mathsf{t}}H \cdot G) \cdot K = F \cdot X$$

est une $R \times Q$-matrice dont le coefficient (r, q) est la somme des sommes des colonnes de $M_{r,q}$.

Par hypothèse, $F \cdot X = X \cdot E$, (6) est satisfaite pour chaque (r, q) et puisque $\mathbb{K}$ est équisoustractif, l'existence de tous les $M_{r,q}$, et donc de G, est assurée de telle sorte que (9) et (10) sont satisfaites.

Si on applique cette construction aux automates $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{B}_2$ de la figure 4, on obtient un possible automate $\mathcal{C}_2 = \langle L_2, G_2, V_2 \rangle$ (il y a évidemment d'autres possibilités de solutions pour G_2) avec

$$L_2 = J_2 \cdot {}^{\mathsf{t}}H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = K_2 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & z \\ 0 & 0 & 2\,z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,z \end{pmatrix},$$

et qui est représenté à la figure 5.

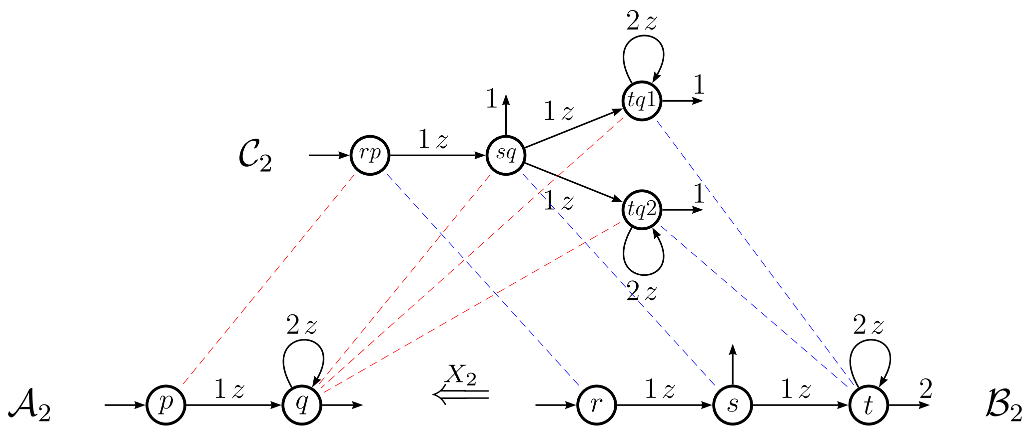

Figure 5: La construction de l'automate $\mathcal{C}_2$