

## Leçon 2 — Exercices

### 1 .— Expressions rationnelles.

- (a) Donner des expressions rationnelles pour les graphes des relations « ordre lexicographique » et « ordre radiciel » sur  $\{a, b\}^*$ .
- (b) Donner des expressions rationnelles pour les graphes des relations « facteurs » et « sous-mots » sur  $\{a, b\}^*$ .

### 2 .— Lemme d'itération.

Soit  $\theta: A^* \rightarrow B^*$  une relation rationnelle.

- (a) Montrer qu'il existe un entier  $N$  tel que pour couple  $(u, v)$  dans  $\widehat{\theta}$  dont la longueur<sup>1</sup> est supérieure à  $N$  il existe une factorisation

$$(u, v) = (s, t)(x, y)(w, z)$$

telle que: (i)  $1 \leq |x| + |y| \leq N$  et (ii)  $(u, v) = (s, t)(x, y)^*(w, z) \subseteq \widehat{\theta}$ .

- (b) Montrer que la fonction *miroir*  $\rho: A^* \rightarrow A^*$  :

$$\rho(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_n a_{n-1} \cdots a_1 ,$$

n'est pas une relation rationnelle.

### 3 .— Conjugaison.

Soit  $\text{Conj}: A^* \rightarrow A^*$  la relation qui à un mot  $w$  fait correspondre l'ensemble de ses *conjugués*:  $\text{Conj}(w) = \{vu \mid u, v \in A^* \quad uv = w\}$ .

- (a) Montrer que  $\text{Conj}(L)$  est rationnel quand  $L$  l'est.
- (b) Donner un transducteur qui à un mot quelconque  $w$  de  $\{a, b\}^*$  associe le mot obtenu en plaçant la première lettre de  $w$  à la fin.
- (c) Composer ce transducteur avec lui-même.
- (d) Montrer que  $\text{Conj}$  n'est pas une relation rationnelle.

---

<sup>1</sup>La longueur d'un couple est la somme des longueurs de ses composantes.