Leçon 1 — Exercices

1 .— **Ordres.** Dans cet exercice, l'alphabet A est *totalement ordonné* et cet ordre est noté $\leqslant$.

L'*ordre lexicographique*, noté $\preccurlyeq$, étend cet ordre de A à A^* de la manière suivante. Soient v et w deux mots de A^* et u leur plus long préfixe commun. Alors, $v \preccurlyeq w$ si $v = u$ ou, si $v = u\,a\,s$, et $w = u\,b\,t$ avec a et b dans A, alors $a < b$.

(a) Donner un transducteur fini sur $A^* \times A^*$ qui réalise $\preccurlyeq$, c'est-à-dire qui à chaque mot u de A^* fait correspondre l'ensemble des mots qui lui sont supérieurs (ou strictement supérieurs).

L'ordre *radiciel* (appelé aussi *généalogique*, *militaire*, ou *short-lex*), noté $\sqsubseteq$, est défini de la manière suivante : $v \sqsubseteq w$ si $|v| < |w|$ ou $|v| = |w|$ et $v \preccurlyeq w$.

(b) Donner un transducteur fini sur $A^* \times A^*$ qui réalise $\sqsubseteq$.

Pour tout langage L de A^*, on note $\mathsf{minlg}\,(L)$ (resp. $\mathsf{Maxlg}\,(L)$) l'ensemble des mots de L qui n'ont pas dans L de mots de même longueur plus petits (resp. plus grands) dans l'ordre lexicographique.

(c) Montrer que si L est rationnel, $\mathsf{minlg}\,(L)$ et $\mathsf{Maxlg}\,(L)$ le sont aussi.

2 .— **Compléments.**

(a) Montrer que le complément de l'identité est une relation RTF.

(b) Montrer que le complément d'une relation RTF *fonctionnelle* est RTF.

3 .— **Représentation des nombres.**

Soient $A_2 = \{0, 1\}$ et $A_3 = \{0, 1, 2\}$ deux alphabets de chiffres. On peut considérer A_3 comme un alphabet non-canonique pour la représentation des entiers en base 2 : $\overline{1\,2} = 4$, $\overline{2\,0\,1} = 9$, *etc.*

Soit $\nu_2\colon A_3^* \to A_2^*$ la normalisation en base 2, c'est-à-dire la relation qui à un mot de A_3^* associe un mot de A_2^* qui représente le même entier en base 2.

(a) Donner un transducteur qui réalise ν_2.

(b) Soit $\varphi\colon A_2^* \to A_3^*$ la fonction qui envoie la représentation en binaire de chaque entier sur sa représentation en base 3, *e.g.* $\varphi(1\,0\,0\,0) = 2\,2$.

Montrer que φ n'est pas une relation RTF.

4 .— **Opérations sur les nombres.**

(a) Donner un transducteur qui réalise la multiplication par 9 sur les entiers écrits en binaire, c'est-à-dire la relation $\tau\colon A_2^* \to A_2^*$ telle que $\overline{\tau(w)} = 9 \cdot \overline{w}$.

(b) Soit $\mu\colon A_2^* \times A_2^* \to A_2^*$ la relation qui réalise la multiplication, c'est-à-dire que $\mu(u, v) = w$ où $\overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{v}$.

Montrer que μ n'est pas une relation RTF.

5 .— Equivalence d'application d'un morphisme.

Soit $\varphi_1 \colon \{a, b, c\}^* \to \{x, y\}^*$ le morphisme défini par :

$$\varphi_1(a) = x\,, \quad \varphi_1(b) = y\,x\,, \quad \varphi_1(c) = x\,y\,.$$

(a) Donner un transducteur sous-normalisé qui réalise φ_1.

(b) Donner un transducteur sous-normalisé qui réalise ${\varphi_1}^{-1}$.

(c) Calculer un transducteur sous-normalisé qui réalise ${\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_1$.