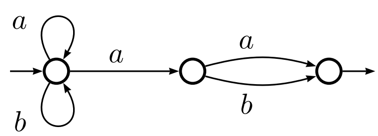
Contrôle des connaissances — Corrigé

Remarque liminaire. La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent ni effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre.

Dans tout ce qui suit, A désigne l'alphabet $A = \{a, b\}$ et est ordonné par $a < b$ à l'exercice 4.

1 .— *Revêtement de Schützenberger.*

(a) *Calculer de revêtement de Schützenberger de l'automate $\mathcal{E}$ ci-dessous*



(b) *On appelle* ensemble de transitions concurrentes *d'un revêtement de Schützenberger $\mathcal{S}$ d'un automate $\mathcal{A}$ un ensemble d'au moins deux transitions qui arrivent dans* le même état *de $\mathcal{S}$ et qui se projettent sur* la même transition *du déterminisé $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$.*

Pourquoi ces ensembles sont-ils intéressants ? Combien y a-t-il d'ensembles de transitions concurrentes dans le revêtement calculé en (a) ? Est-ce que cette réponse pouvait être donnée sans calculer le revêtement ?

(a) Le revêtement de Schützenberger $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est représenté à la figure 1 ci-dessous.

(b) Si dans chaque ensemble de transitions concurrentes de $\mathcal{S}$, on supprime *toutes les transitions sauf une*, on obtient un automate $\mathcal{T}$ tel que la projection sur $\widehat{\mathcal{A}}$ est *In-bijective.* Donc les calculs réussis de $\mathcal{T}$ sont en *bijection* avec les calculs réussis de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est non ambigu, équivalent à $\mathcal{A}$, et s'envoie sur $\mathcal{A}$ par morphisme. C'est cette opération de choix d'une transition dans chaque ensemble de transitions concurrentes qui permet par exemple la construction d'une uniformisation rationnelle d'une relation rationnelle.

Une simple inspection du revêtement $\mathcal{F}$ permet de vérifier qu'il n'y a pas d'ensemble de transitions concurrentes, c'est-à-dire que le projection de $\mathcal{F}$ sur $\widehat{\mathcal{E}}$ est In-bijective, et donc que $\mathcal{F}$ est non-ambigu, ce qui est évident parce que $\mathcal{E}$ lui-même est non ambigu (parce que *co-déterministe*) et que les calculs réussis de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont en bijection.

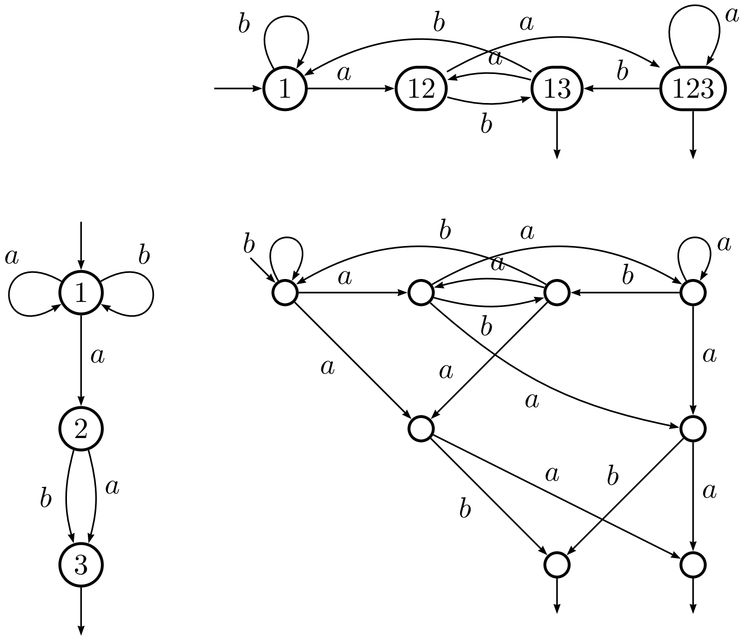


FIG. 1 – Le revêtement de Schützenberger de $\mathcal{E}$

2 .— ***Identification des facteurs répétés.*** *Dans cet exercice, il est suggéré, voire fortement conseillé, de décrire les relations rationnelles de A^* dans lui-même par leur graphe. Bien entendu, les réponses (correctes) sous une autre forme seront prises en compte.*

(a) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u.

(b) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u de longueur 3.

(c) Donner la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u de longueur 3 qui sont répétés au moins deux fois. Quelle est l'image du mot $a\,b\,a\,b\,a\,b$ dans cette relation ?

(d) Montrer que la relation γ qui à chaque mot u de A^* associe tous les facteurs de u qui sont répétés au moins deux fois n'est pas une relation rationnelle.
[Indication : on pourra considérer l'inverse de la restriction de γ au langage $K = a\,b^*a\,a\,b^*a$.]

(a) Exemple donné en cours. Le graphe de cette relation est

$$(A,1)^*\big((a,a)+(b,b)\big)^*(A,1)^* \quad .$$

(b) Par imitation de l'expression précédente, il vient

$$(A,1)^*\big((a,a)+(b,b)\big)^3(A,1)^* \quad .$$

(c) Une première expression, inspirée de la précédente, est assez naturellement :

$$(A,1)^* \left(\bigcup_{v \in A^3} ((v,1)(A,1)^*(v,v)) \right) (A,1)^* \quad . \tag{1}$$

Les deux facteurs de longueur 3 de $ababab$, aba et bab sont répétés deux fois et ne sont pourtant pas repérés par l'expression (1) parce que leurs occurrences se chevauchent dans $ababab$.

On comprend qu'il faut compléter cette expression (1) pour prendre en compte les facteurs chevauchants. On pourrait donner une formule générale mais pour les facteurs de longueur 3, il est plus simple de donner la liste explicite.

$$(A,1)^* \left(\left(\bigcup_{v \in A^3} ((v,1)(A,1)^*(v,v)) \right) \cup \right.$$
$$\left. ((aaaa,aaa) + (bbbb,bbb) + (ababa,aba) + (babab,bab)) \right) (A,1)^* \quad .$$

Remarque : le transducteur le plus compact qui réalise cette relation a 10 états, un transducteur sous-normalisé naturel (pas le plus compact) en a 56...

(d) Soient ι_K l'intersection avec K et $\theta = \gamma \circ \iota_K$ la restriction de γ au langage K. Pour tout entier n, $\theta^{-1}(ab^na) = ab^naab^na$ et l'image par θ^{-1} du rationnel ab^+a est le langage :

$$\theta^{-1}(ab^+a) = \{ab^naab^na \mid n > 0\}$$

qui n'est pas rationnel. Contradiction avec l'hypothèse que γ, donc θ, donc θ^{-1} est rationnel.

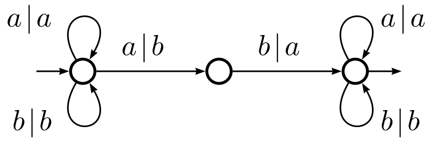
3 .— ***Remplacement d'un facteur.*** *On note σ la relation qui à chaque mot u de A^* associe tous les mots v obtenus en remplaçant un facteur ab de u par ba.*

(a) Quelle est l'image de $abbab$ par σ ? Donner un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ.

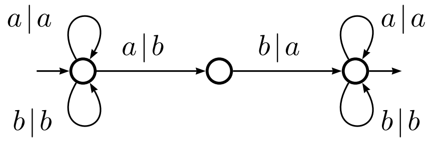
(b) Quelle est l'image de $abbab$ par $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$? Composer le transducteur précédent par lui-même pour obtenir un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ^2.

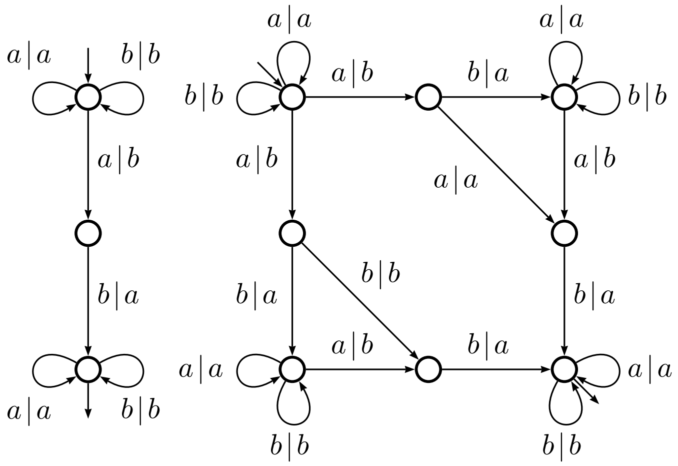
(c) On note $\overset{\star}{\sigma}$ la relation qui correspond à l'itération un nombre arbitraire de fois de σ et θ la composition de $\overset{\star}{\sigma}$ avec l'intersection avec le langage b^*a^*. Quelle est l'image d'un mot w de A^* par θ ? Montrer que $\overset{\star}{\sigma}$ n'est pas rationnelle.

(a) $\sigma(a\,b\,b\,a\,b) = \{b\,a\,b\,a\,b, a\,b\,b\,b\,a\}$. Un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ est donné ci-dessous.



(b) $\sigma^2(a\,b\,b\,a\,b) = \{b\,b\,a\,a\,b, b\,a\,b\,b\,a\}$. Un transducteur lettre-à-lettre qui réalise σ^2 est donné ci-dessous.





(c) Pour tout mot w de A^*, on a $\theta(w) = b^{|w|_b} a^{|w|_a}$.
L'image par θ du rationnel $(a\,b)^*$ est le langage :

$$\theta((a\,b)^*) = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

qui n'est pas rationnel. Contradiction avec l'hypothèse que $\overset{\star}{\sigma}$, donc θ, est rationnel.

4 .— ***Ordre radiciel.*** *Rappelons que l'ordre radiciel (ou militaire, ou généalogique) strict sur A^* est défini par :*

$$u \sqsubset v \iff \begin{cases} |u| < |v| & \textit{ou} \\ |u| = |v| & \textit{et} \quad u = x\,a\,w, v = x\,b\,z \quad \text{avec} \quad x, w, z \in A^* \end{cases}$$

(a) *Donner un transducteur* sous-normalisé *et* calé *(i.e. dont tous les états satisfont la condition de calage) qui réalise l'ordre radiciel, c'est-à-dire qui associe à chaque mot u de A^* tous les mots v de A^* qui sont strictement plus grands que u dans l'ordre radiciel.*

(b) *On note L l'ensemble des mots de A^* qui ont un nombre pair de b :*

$$L = \{w \in A^* \mid |w|_b = 0 \mod 2\} \tag{2}$$

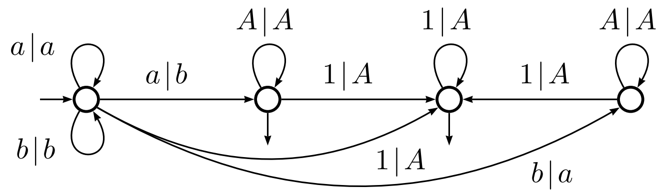
Donner un automate qui accepte les mots de L. Donner un transducteur sous-normalisé qui réalise ι_L, l'intersection avec L.

(c) *Donner un transducteur sous-normalisé et calé qui à chaque mot u de L associe tous les mots de A^* qui sont plus grands que u dans l'ordre radiciel.*

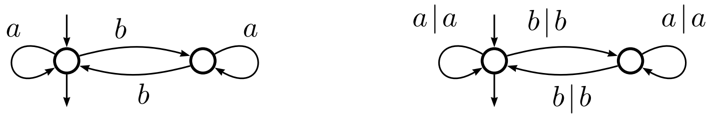
(d) *Montrer que la relation qui à chaque mot u de L associe tous les mots de L qui sont plus grands que u dans l'ordre radiciel est une relation synchrone (sans nécessairement construire le transducteur correspondant).*

(e) *Montrer que la relation qui à chaque mot u de L associe* le *mot v qui est le* successeur *de u dans L pour l'ordre radiciel (c'est-à-dire que v est dans L, $u \sqsubset v$, et il n'existe pas de w dans L tel que $u \sqsubset w \sqsubset v$) est une relation synchrone (sans nécessairement construire le transducteur correspondant).*

(a) Un transducteur sous-normalisé et calé $\mathcal{R}$ qui réalise la relation « ordre radiciel strict » qu'on notera ρ.



(b) Un automate qui accepte L et un transducteur sous-normalisé $\mathcal{I}$ qui réalise ι_L.



(c) Le transducteur demandé est le composé de $\mathcal{I}$ par $\mathcal{R}$. La composition de ces deux transducteurs est montrée à la figure 2.

(d) La relation qui à chaque mot u de L associe tous les mots de L qui sont plus grands que u dans l'ordre radiciel est obtenue en composant la relation $\rho \circ \iota_L$ réalisée par le transducteur calculé à la question précédente avec la relation ι_L, intersection avec le langage L, c'est-à-dire la relation $\iota_L \circ \rho \circ \iota_L$. Comme les relations synchrones sont fermées par composition, cette relation est synchrone.

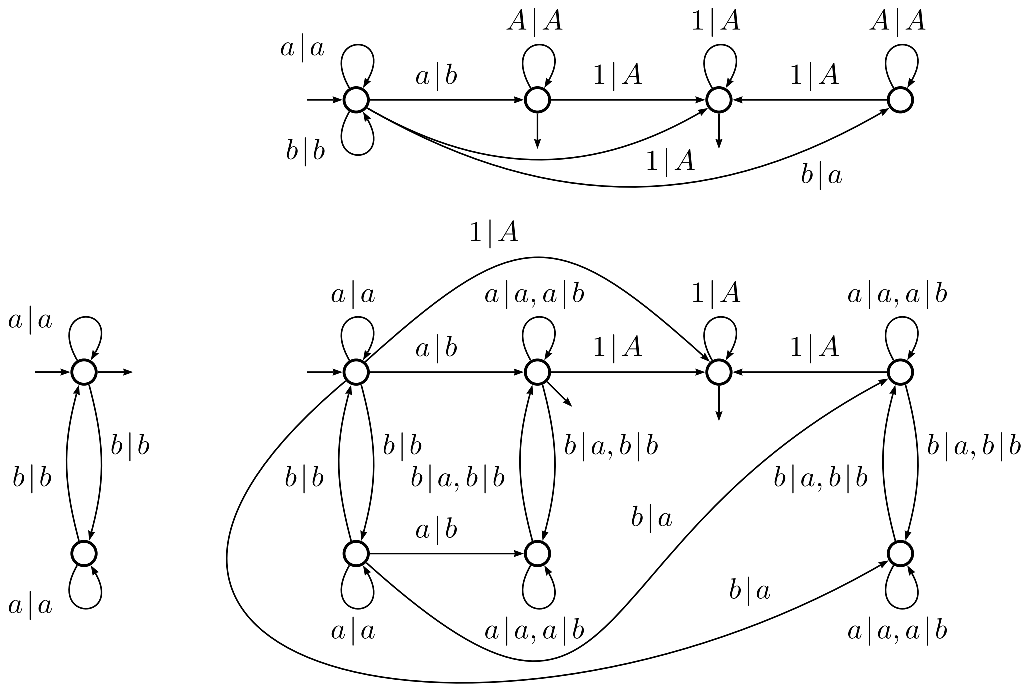


FIG. 2 – Le transducteur $\mathcal{R} \circ \mathcal{I}$ (partie co-accessible)

(e) Notons γ_L la relation (synchrone) de la question précédente : $\gamma_L = \iota_L \circ \rho \circ \iota_L$ et σ_L la relation successeur dans L.

Par définition, et pour tout u dans L, le successeur $\sigma_L(u)$ de u appartient à $\gamma_L(u)$. Toujours par définition, pour tout w dans $\gamma_L(u)$, $\sigma_L(u)$ n'appartient pas à $\gamma_L(w)$. Ainsi, pour tout u dans L, $\sigma_L(u) = \gamma_L(u) \setminus \gamma_L(\gamma_L(u))$, c'est-à-dire :

$$\sigma_L = \gamma_L \setminus \gamma_L \circ \gamma_L \quad .$$

Comme les relations synchrones sont fermées par complémentation et intersection, σ_L est une relation synchrone.